

ЛЕКЦИЯ 12

§ 12. Теңдеудің аналитикалық шешімдері

Егер $t = t_0$ нүктесінің қандай да болмасын бір маңайы табылып, ол маңайда $f(t)$ функциясы $(t - t_0)$ -дің дәрежелері бойынша жазылған дәрежелік (жинақты) қатарға жіктелсе, яғни

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k, \quad (1)$$

онда $f(t)$ функциясын $t = t_0$ нүктесінде *аналитикалық* немесе *голоморф-ты функция* деп атайды. Егер t – комплекс мәнді айнымалы болса, онда аталған жағдайда қатардың a_k коэффициенттері де комплекс сандар болады. Біз нақты аналитикалық функцияларды қарастырамыз (яғни $t, t_0, a_k \in \mathbf{R}$). Егер $f(t)$ функциясы қандай да болмасын бір аралықтың барлық нүктесінде аналитикалық функция болса, онда оны осы *аралықта аналитикалық функция* деп атайды.

Аналитикалық функциялардың жиыны азайту, қосу және көбейту амалдары бойынша тұйық.

Айталық, $r > 0$ – (1) қатардың жинақталу радиусы болсын, яғни $|t - t_0| < r$ болғанда қатар жинақты, ал $|t - t_0| > r$ болғанда жинақсыз ($r = \infty$ болса, қатар кез-келген t үшін жинақты). Онда $(t_0 - r, t_0 + r)$ аралығында $f(t)$ функциясының кез-келген ретке дейінгі туындысы бар болады, ол туындылар (1) қатарды мүшелеп дифференциалдау арқылы табылады. Айта кетер жағдай (1) қатарды дифференциалдау нәтижесінде алынған қатарлардың да жинақталу радиусы r -ге тең болады. Бұл келтірілген қасиеттер $f(t)$ функциясының интегралдары үшін де орындалады. Аналитикалық функция жалғыздық қасиетке ие: берілген $t = t_0$ нүктесінде аналитикалық болатын $f(t)$ функциясының (1) қатар түрінде жазылуы жалғыз, яғни егер

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t - t_0)^k, |t - t_0| < r$$

болса, онда $a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \dots$

Екінші ретті сызықтық біртекті теңдеу

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (2)$$

қарастыралық. Оның коэффициенттері t_0 нүктесінің $(t_0 - r, t_0 + r)$ маңайында аналитикалық функциялар болсын:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k, q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^k \quad (3)$$

Онда (2) теңдеудің кез-келген шешімі де осы маңайда аналитикалық функция болады [15]. Бұл тұжырым кез-келген n -ретті сызықтық біртекті теңдеулер үшін де дұрыс. Бұл қасиет (2) теңдеудің шешімдерін дәрежелік қатар арқылы табуға мүмкіндік береді. Ықшамдылық үшін $t_0 = 0$ деп алайық.

Теңдеудің шешімін t -ның дәрежесі бойынша жазылған коэффициенттері анықталмаған дәрежелік қатар түрінде іздейміз:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot t^k \quad (4)$$

Бұл қатарды, екінші ретке дейін формальды түрде дифференциалдап, (3) қатарларды ($t_0 = 0$) ескере отырып, (2) теңдеуге қоялық

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x_k t^{k-2} + \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j \sum_{k=1}^{\infty} k x_k t^{k-1} + \sum_{j=0}^{\infty} q_j t^j \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k = 0, \forall t \in (-r, r). \quad (5)$$

Алынған (4) функция (2) теңдеудің $(-r, r)$ аралығындағы шешімі болу үшін (5) тепе-теңдіктің орындалуы қажет. Ол тепе-теңдіктің екі жағы да дәрежелік қатар. Жалғыздық қасиет бойынша сол жақта тұрған қатардың (қатарларды көбейту және қосу нәтижесінде алынатын) барлық коэффициенті нөлге тең болуы керек. Сонда $t^0, t^1, t^2, \dots$ дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді нөлге теңестіре отырып, белгісіз x_0, x_1, x_2 шамаларын анықтау үшін мынадай рекуррентті теңдеулер жүйесін ала-мыз:

$$\begin{cases} q_0 x_0 + p_0 x_1 + 1 \cdot 2 \cdot x_2 = 0; \\ q_1 x_0 + (q_0 + p_1) x_1 + 2 p_0 x_2 + 2 \cdot 3 x_3 = 0; \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{k=0}^n (q_{n-k} x_k + (k+1) p_{n-k} x_{k+1}) + (n+1)(n+2) x_{n+2} = 0; \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Алғашқы екі коэффициент x_0 мен x_1 -лерді еркін (кез-келген) сан етіп алуға болады. Олар шешімнің өзі мен туындысына қойылатын бастапқы $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$ шартқа эквивалент. Әуелі бірінші теңдеуден x_2 -ні табамыз, сонан кейін екінші теңдеуден x_3 -ті табамыз, әрі қарай сол сияқты. Табылған коэффициенттерді (4) -ке қойып коэффициенттері анықталған дәрежелік қатар аламыз. Ол қатар жоғарыда келтірген тұжырым бойынша $(-r, r)$ аралығында жинақты. Олай болса, оны екі ретке дейін дифференциалдағанымыз заңды. Демек алынған қатар – (2) теңдеудің шешімі.

МЫСАЛ. Эйри¹ теңдеуін $\ddot{x} - tx = 0$ шешу керек.

ШЕШУІ. Коэффициенттер $p(t) \equiv 0, q(t) = -t$ аналитикалық функциялар. Теңдеудің шешімін коэффициенттері анықталмаған мына қатар

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$$

түрінде іздейміз. Қатарды формальды түрде екінші ретке дейін дифференциалдап (жинақтылығы белгісіз болғандықтан дифференциалдау амалы әзірге заңсыз), оны теңдеуге қойып,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+1} = 0$$

¹ Эйри Д.Б. (1801-1892) – ағылшын математигі.

теңдігін аламыз. Теңдіктің екі жағындағы t -ның бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестіре отырып, белгісіз a_k -лар үшін мынадай рекуррентті жүйе аламыз:

$$\begin{cases} a_2 = 0, \\ 3 \cdot 2a_3 - a_0 = 0, \\ 4 \cdot 3a_4 - a_1 = 0, \\ 5 \cdot 4a_5 - a_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ k(k-1)a_k - a_{k-3} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Бұдан

$$a_k = \frac{a_{k-3}}{k(k-1)}$$

алынады да, индекс k -ның мәніне байланысты мынадай формулалар табылады:

$$a_{3k-1} = 0, \quad a_{3k} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot 3k},$$

$$a_{3k+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3k \cdot (3k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Мұндағы a_0, a_1 сандары теңдеуден табылмайды. Олар үшін кез-келген тұрақтыны алуға болады. Ол тұрақтылардың мәндері бастапқы шарт бойынша анықталатыны жоғарыда айтылды. Сонымен қатар мына түрде болады:

$$x(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \cdot \dots \cdot ((3k-1) \cdot 3k)} +$$

$$+ a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \cdot \dots \cdot (3k \cdot (3k+1))} = a_0 \varphi_1(t) + a_1 \varphi_2(t).$$

Бұл дәрежелік қатардың жинақталу радиусы шексіздікке тең ($r = \infty$). Олай болса, дифференциалдау амалымыз заңды, бұл қатар – теңдеудің $(-\infty, +\infty)$ аралығындағы шешімі. Қатарға қосылғыш есебінде еніп тұрған екі ($\varphi_1(t)$ және $\varphi_2(t)$) жинақты қатардың әрқайсысы (яғни олардың әрқай-сысының қосындысы) теңдеудің шешімі болады. Ол қатарлардың ($\varphi_1(t)$ және $\varphi_2(t)$) өзара сызықтық тәуелсіз болатыны айқын. Ал жалпы шешім осы шешімдердің еркін тұрақтылармен алынған сызықтық комбинациясы түрінде жазылып тұр.

Әлбетте (2) теңдеудің коэффициенттері практикада (3) қатарлар түрінде бола бермейді. Көп жағдайларда олар рационал функциялар

$$p(t) = \frac{M_1(t)}{M_2(t)}, \quad q(t) = \frac{N_1(t)}{N_2(t)}$$

түрінде кездеседі. Мұнда $M_j(t), N_j(t), j=1,2$ – көпмүшеліктер. Бөлшек-терді қысқартылмайтын бөлшектер деп есептеуге болады. Онда $M_2(t)=0$ немесе $N_2(t)=0$ болатын нүктелерде (2) теңдеудің ең болмағанда бір коэффициенті шексіздікке тең болады.

Ондай нүктелерді *ерекше нүктелер* деп атайды. Жалпы алғанда, ол нүктелерде (2) теңдеудің шешімдері де ерекшелікке ие болады (мысалы аналитикалық функция бола бермейді). Біз жай ерекшеліктерді, атап айтқанда оқшауланған *регулярлық ерекше* нүктелерді қарастырамыз.

Екінші ретті сызықтық теңдеу қарастырайық:

$$(t-t_0)^2 \ddot{x} + (t-t_0)p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \quad (6)$$

Егер $p(t), q(t)$ функциялары $|t-t_0| < r$ болғанда аналитикалық функциялар болса және $p(t)$ функциясы $(t-t_0)$ -ге, ал $q(t)$ функциясы $(t-t_0)^2$ -на қалдықсыз бөлінбесе, t_0 (6) теңдеудің *регулярлық ерекше нүктесі* [1] болады. Бұл түрдегі теңдеуге мысалы мына

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \frac{1}{4})x = 0.$$

Бессель теңдеуі жатады, $t=0$ оның ерекше нүктесі. Бұл теңдеудің сызықтық тәуелсіз екі шешімі

$$x_1(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}, \quad x_2(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

бар екені көрсетілді. Әрбір шешім $t=0$ нүктесінде аналитикалық функция емес, оларды мынадай қатар түрінде жазуға болады:

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!},$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Бұл қатарлардың жай дәрежелік қатарлардан айырмасы t^μ көбейткішіне көбейтіліп тұрғандығы (атап айтқанда μ санының бүтін болмағандығы). Мұндағы μ қандай да болмасын нақты сан, ал

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k \quad (7)$$

қатары жинақты және $a_0 \neq 0$ болсын. Онда мына түрдегі қатарды

$$(t-t_0)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k \quad (8)$$

$(t-t_0)$ -дің дәрежесі бойынша жазылған *жалпыланған дәрежелік қатар* деп атайды.

Коэффициенттері (t_0-r, t_0+r) аралығында (3) түрдегі жинақты қатарлар $(p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0)$ болатын (6) теңдеудің $t=t_0$ нүктесінің аймағында (8) жалпыланған қатар түрінде болатын ең болмағанда бір шешімі бар болады және ондағы (8) қатар ең болмағанда (t_0-r, t_0+r) аралығында жинақты болады [15]. Біз бұл тұжырымның дәлелдеуін емес, шешімді осындай қатар түрінде табудың практикалық жолын көрсетеміз. Ыңғайлы болу үшін $t_0=0$ деп, (6) теңдеуді $t>0$ жағдайында қарастыралық. Оның шешімін мына қатар

$$x(t) = t^\mu \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (9)$$

түрінде іздейміз. Мұнда a_k , $(k=0, 1, \dots)$, $a_0 \neq 0$, белгісіз сандар. Сонда

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu) a_k t^{k+\mu-1}, \\ \ddot{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu)(k + \mu - 1) a_k t^{k+\mu-2} \end{aligned}$$

болады да, қатарды (6) теңдеуге қойып, t^μ -не қысқартқаннан кейін

$$\begin{aligned} &a_0[\mu(\mu-1) + p_0\mu + q_0] + [a_1(\mu(\mu+1) + p_0(\mu+1) + q_0) + \\ &+ a_0(\mu p_0 + q_0)]t + \dots + [a_k((\mu+k)(\mu+k-1) + \dots + \\ &+ p_0(\mu+k) + q_0) + \dots + a_0(p_0\mu + q_0)]t^k = 0 \end{aligned}$$

теңдігі алынады. Енді t -ның әр түрлі дәрежелерінің алдындағы коэф-фициенттерін нөлге теңестіріп, мынадай рекуррентті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_0 f_0(\mu) = 0 \\ a_1 f_0(\mu+1) + a_0 f_1(\mu) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_k f_0(\mu+k) + a_{k-1} f_1(\mu+k-1) + \dots + a_0 f_k(\mu) = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Мұнда $f_0(\mu) = \mu(\mu-1) + p_0\mu + q_0$, $f_j(\mu) = p_j\mu + q_j$ ($j=1, 2, \dots$). Ал $a_0 \neq 0$ болғандықтан μ саны $f_0(\mu) = \mu(\mu-1) + p_0\mu + q_0 = 0$ теңдеуін қанағаттандыруы керек. Бұл теңдеу *анықтаушы теңдеу* деп аталады. Оның түбірлерін μ_1, μ_2 деп белгілейік.

1. $\mu_1 - \mu_2$ айырымы бүтін сан емес. Онда кез-келген бүтін k саны үшін $f_0(\mu_1 + k) \neq 0$, $f_0(\mu_2 + k) \neq 0$. Бұл жағдайда жүйедегі μ -дің орнына μ_1 және μ_2 мәндерін кезегімен қойып, олардың әрқайсысы үшін белгісіз a_k , $(k=1, 2, \dots)$ коэффициенттерін табуға болады. Табылған коэффициенттер мен μ -дің мәндерін (9) формулаға қойып теңдеудің дара шешімдерін аламыз.

2. $\mu_1 - \mu_2 = n$ бүтін сан. Анық болу үшін $n \geq 0$ деп алайық. Олай болмаса, түбірлердің нөмірлерін ауыстыру арқылы бұл теңсіздікті алар едік. Онда кез-келген бүтін $k \leq 1$ саны үшін $f_0(\mu_1 + k) \neq 0$ теңсіздігі орындалады да, жүйе $\mu = \mu_1$ болғанда шешіледі. Табылған $\mu = \mu_1$ мәні мен коэффициенттерді (9) формулаға қойып, (6) теңдеудің дара шешімін аламыз. Ал $\mu = \mu_2$ болса, онда $f_0(\mu_2 + n) = f_0(\mu_1) = 0$ болады да, жүйеден белгісіз коэффициенттерді табу мүмкін болмайды. Бұл жағдайда екінші шешімді Остроградский-Лиувилль формуласы арқылы анықтаған қолайлы:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt}}{x_1^2(t)} dt. \quad (10)$$

Бұл шешімнің құрамына $\ln t$ функциясы кіруі мүмкін.

Сонымен, анықтаушы теңдеудің түбірлерінің айырымы бүтін сан болмаса, (6) теңдеудің (9) қатар түрінде сызықты тәуелсіз екі шешімі бар да, ал айырым бүтін сан болса, (6) теңдеудің (9) қатар түрінде ең болмағанда бір шешімі бар.

МЫСАЛ. Эйлер теңдеуінің: $t^2\ddot{x} + b_1t\dot{x} + b_2x = 0, t > 0, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ шешімдерінің іргелік жүйесін (базисін) табу керек.

ШЕШҮІ. Мұнда $t=0$ регулярлық ерекше нүкте болады. Анықтаушы теңдеу $f_0(\mu) = \mu(\mu-1) + b_1\mu + b_2 = 0$ түрінде, себебі $p_0 = b_1, q_0 = b_2$. Оның түбірлерін μ_1, μ_2 деп белгілейік.

1. Түбірлер нақты және әр түрлі: $\mu_1 > \mu_2$ болсын да, $(\mu_1 - \mu_2)$ айырымы бүтін сан болмасын. Онда $f_0(\mu_j + k) \neq 0, \forall k \in \mathbf{N}, j = 1, 2$. Ал $p_j = 0, q_j = 0, \forall j \in \mathbf{N}$ болғандықтан, $f_j(\mu_j + l) = 0, \forall j \in \mathbf{N}, l = 0, 1, \dots, k-1$. Сондықтан жүйедегі $\mu = \mu_j, j = 1, 2$ болған кезде $a_1 = a_2 = \dots = a_k = \dots = 0$ екені шығады. Егер $a_0 = 1$ деп алсақ, теңдеудің сызықтық тәуелсіз екі шешімін аламыз:

$$x_1(t) = t^{\mu_1}, \quad x_2(t) = t^{\mu_2}$$

Егер $\mu_1 - \mu_2 = n \in \mathbf{N}$ болса, онда $f_0(\mu_1 + k) \neq 0, \forall k \in \mathbf{N}$ болады да, көрсетілген жолмен $x_1(t) = t^{\mu_1}$ шешімі табылады. Екінші шешімді (10) формула арқылы табамыз:

$$x_2(t) = t^{\mu_1} \int t^{-2\mu_1} e^{-b_1 \ln t} dt = \frac{t^{\mu_1 - (b_1 + 2\mu_1) + 1}}{-(b_1 + 2\mu_1) + 1} = \frac{t^{1-b_1-\mu_1}}{1-b_1-2\mu_1}.$$

Виет теоремасы бойынша:

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 - b_1 \Rightarrow b_1 = 1 - \mu_1 - \mu_2.$$

Сондықтан $x_2(t) = -t^{\mu_2} / n$. Теңдеу сызықтық біртекті болғандықтан $x_2(t) = t^{\mu_2}$ деп есептеуге болады. Табылған t^{μ_1}, t^{μ_2} шешімдері $(0, +\infty)$ аралығында теңдеудің базисін құрайды.

Енді түбірлер әр түрлі болып қала берсін де, бірақ комплекс мәнді болсын: $\mu_1 = \alpha + i\beta, \mu_2 = \alpha - i\beta$. Онда комплекс мәнді шешімнің

$$x(t) = t^{\alpha+i\beta} = t^{\alpha} (\cos(\beta \ln t) + i \sin(\beta \ln t))$$

нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, екі нақты шешім

$$x_1(t) = t^{\alpha} \cos(\beta \ln t), \quad x_2(t) = t^{\alpha} \sin(\beta \ln t)$$

аламыз. Олар $(0, +\infty)$ -те сызықтық тәуелсіз, яғни теңдеудің базисін береді.

2. Түбірлер өзара тең $\mu_1 = \mu_2$ болсын. Онда $f(\mu_j + k) \neq 0, j = 1, 2, \forall k \in \mathbf{N}$. Сондықтан бір шешім t^{μ_1} -ге тең, ал екінші шешімді (10) формула бойынша табамыз. Тек бұл жолы $b_1 = 1 - 2\mu_1$ екенін ескеру керек.

$$x_2(t) = t^{\mu_1} \int t^{-1} dt = t^{\mu_1} \ln t.$$

Жоғарыда айтылғандай, екінші шешімге $\ln t$ еніп тұр.

Жаттығулар

1. Бессель теңдеуінің $t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - a^2)x = 0$, $a \in \mathbf{R}$
 $t = 0$ нүктесінің маңайында $0 < a \neq n \in \mathbf{N}$ болған кездегі базисін табыңыз.
2. $t(t-1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$ теңдеуінің $t = 0$ нүктесінің маңайында сызықтық тәуелсіз екі шешімін табыңыз.